между агентам экономики и, следовательно, наилучшим образом подходит для численного анализа экономической ситуации из предпосылок существования равновесного состояния.

В результате получаем вычислимую модель общего экономического равновесия, которая описывает сложившиеся в российской экономике связи между агентами и позволяет проводить прогнозные расчеты.

В качестве вариантов развития экономики предполагается использовать заложенные сценарные условия, применяемые Министерством экономического развития России. Помимо этого модель позволяет оценить влияние на реальный сектор проводимой Центральным банком России денежно-кредитной политики и изменений в налоговой политике государства.

Вычислимая модель общего экономического равновесия предполагает для нахождения равновесного состояния решение системы, состоящей из десятков (иногда и сотен) нелинейных уравнений и неравенств. Они выводятся путем решения задачи поиска частичного равновесия на каждом из имеющихся в модели рынков факторов производств, товаров и услуг. Решение системы такой сложности невозможно без применения программных комплексов. В рамках исследования предполагается оценить имеющиеся современные вычислительные комплексы на предмет их удобного использования для решения практических задач, выявить их достоинства и недостатки.

В результате проведения исследования будет построена вычислимая модель общего экономического равновесия, в которой в полной мере представлена экономическая система России. Для построенной модели будут рассчитаны сценарии развития экономики в будущем, а также оценено влияние изменений в государственной и монетарной политике на реальный сектор, посчитаны эластичности, оценены изменения в уровне благосостояния населения. В дальнейшем планируется развитие модели с целью повышения точности прогнозных расчетов и более детального анализа взаимосвязей внутри экономичекой системы.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана ЗАО «Прогноз».

Simonov P.M., Shultz M.N. APPLICATION GENERAL EQUILIBRIUM THEORY FOR MODELING RUSSIAN ECONOMY

The possibility of use of the general equilibrium approach for modelling of economy of Russia at its modern stage of development, the basic stages of construction of model, possibility which open at application of the given method, is considered.

Key words: general equilibrium theory; computable general equilibrium model.

УДК 517.968

СОПОСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СПОСОБОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ОПИСАНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ РЯДАМИ ВОЛЬТЕРРА

© **С.В. Солодуша**

Ключевые слова: уравнения Вольтерра I рода; система автоматического регулирования.
Работа посвящена сопоставлению алгоритмов моделирования нелинейной динамики с помощью квадратичных полиномов Вольтерра. Приведены результаты вычислительных экспериментов для эталонной модели теплообмена, связанных с задачей автоматического регулирования.

В теории математического моделирования нелинейных динамических систем хорошо известен подход, дающий представление отклика $y(t)$ системы типа «вход-выход» на входной сигнал $x(t)=\big(x_1(t),\, x_2(t),\, ..., x_p(t)\big)$ в виде полинома Вольтерра N-ой степени:

$$y(t) = P_N\big(x(t)\big) \equiv \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{1\leqslant i_1 \leqslant ... \leqslant i_\nu \leqslant p} \int\limits_0^t ... \int\limits_0^t K_{i_1,...,i_\nu}(t, s_1, ..., s_\nu)\, x_{i_1}(s_1) ... x_{i_\nu}(s_\nu) ds_1 ... ds_\nu, \quad (1)$$

$t \in [0, T]$, причем $y(0)=0$, $y(t) \in C^{(1)}_{[0,T]}$. Построить математическую модель в виде (1) — значит решить задачу идентификации ядер Вольтерра $K_{i_1,...,i_\nu}$, симметричных по тем переменным, которые соответствуют совпадающим индексам $i_1, ..., i_\nu$. В монографии [1] разработана методика построения $P_N\big(x(t)\big)$, основанная на задании многопараметрических семейств кусочно-постоянных тестовых входных сигналов. Эта методика была реализована в программном обеспечении [2], использующем эталонную модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата с независимым подводом тепла:

$$\Delta i_{et}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int\limits_0^t \left(\Delta\mathcal{Q}(\eta) - \frac{\mathcal{Q}_0}{\mathcal{D}_0} \Delta\mathcal{D}(\eta) \right) \left(e^{-\lambda_1 \int\limits_\eta^t \mathcal{D}(s) ds} - e^{-\lambda_2 \int\limits_\eta^t \mathcal{D}(s) ds} \right) d\eta,\ t \in [0, T]. \quad (2)$$

В (2) t — время; λ_1 и λ_2 — некоторые константы; индексами «0» обозначены параметры начального стационарного режима; Δ — приращение, например $\mathcal{D}(t)=\mathcal{D}_0+\Delta\mathcal{D}(t)$.

В работе сравниваются некоторые способы моделирования нелинейной динамики в наиболее важном для приложений случае, когда $N=2$ в (1). Исследуется стационарная динамическая система с входом $x(t)=(\Delta\mathcal{D}(t), \Delta\mathcal{Q}(t))$ и выходом $y(t)=\Delta i_{mod}(t)$. Предположим, что задача построения $P_2\big(x(t)\big)$ решена. На примере эталонной модели (2) рассмотрим задачу автоматического регулирования, связанную с поиском управляющего воздействия $x(t)$, поддерживающего сигнал $y(t)$ на заданном уровне $y^*=0$. Выберем в качестве управляющего воздействия сигнал $x_1(t)=\Delta D(t)$, воздействие $x_2(t)=\Delta\mathcal{Q}(t)$ считаем заданным. В этом случае (1) является полиномиальным интегральным уравнением Вольтерра I рода, непрерывное решение которого, вообще говоря, носит локальный характер. Пусть $\Delta\mathcal{Q}(t)= =\gamma\mathcal{Q}_0 I(t)$, $\gamma \leqslant 75$ %.

Один из исследуемых в работе способов связан с использованием уравнения

$$\int\limits_0^t \hat{K}_1(s) u(t-s-h) ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^t \hat{K}_{11}(s_1, s_2) u(t-s_1-h) u(t-s_2-h) ds_1 ds_2 + \quad (3)$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^t \hat{K}_{12}(s_1, s_2) u(t-s_1-h) \Delta\mathcal{Q}(t-s_2) ds_1 ds_2 = f(t) - \int\limits_0^t \hat{K}_2(s) \Delta\mathcal{Q}(t-s) ds,$$

возникающего в задаче автоматического регулирования замкнутой нелинейной динамической системы. В (3) $\hat{K}_1(0) \neq 0$, $x_1(t) = u(t-h)$, $u(\xi)=0$, $\xi \in [-h, 0]$, h — известное запаздывание, $f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-h)$, сигнал $\varepsilon(t)=y^*-\Delta i_{1_{mod}}(t)$, $\varepsilon(\xi)=0$, $\xi \in [-h, 0]$, считаем ошибкой управления.

В другом подходе используется полиномиальное уравнение, возникающее в задаче автоматического регулирования динамическим объектом при отсутствии обратной связи:

$$\int\limits_0^t K_1(t,s) \Delta\mathcal{D}(s) ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^t \hat{K}_{11}(s_1, s_2) \Delta\mathcal{D}(t-s_1) \Delta\mathcal{D}(t-s_2) ds_1 ds_2 + \quad (4)$$

$$+\int_0^t\int_0^t \hat{K}_{12}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{Q}(t-s_2)ds_1ds_2 = \Delta i_{2_{mod}}(t) - \int_0^t K_2(t,s)\Delta\mathcal{Q}(s)ds,\ t\in[0,T],$$

где $K_1(0,0)\neq 0$. В основе (4) — комбинация линейной нестационарной и билинейной стационарной составляющих. Расчетные схемы решения (3), (4), приведены в [3], [4] соответственно. Пусть $t_i = ih$, $i=\overline{1,n}$, $nh=T$. Сеточные решения уравнений (3), (4) обозначим через $\Delta\mathcal{D}_1^h(t_i)$, $\Delta\mathcal{D}_2^h(t_i)$. Ядра Вольтерра в (3), (4) были настроены на сигналы с амплитудами $|\alpha|\leqslant 60\%$. Вычисления проводились с помощью программного обеспечения [2]. Было получено, что специфика (3), (4) проявляется при входных воздействиях $\Delta\mathcal{Q}(t)$ с $\gamma\geqslant\gamma_{1_{\max}}$ и $\gamma\geqslant\gamma_{2_{\max}}$ соответственно, что означает возможную потерю управляемости. Значения $\gamma_{1_{\max}}$ и $\gamma_{2_{\max}}$ (в %), при которых существуют $\Delta\mathcal{D}_1^h(t_i)$ и $\Delta\mathcal{D}_2^h(t_i)$ для $0\leqslant t_i\leqslant T-h$, приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что существуют такие T, $|\alpha|$, при которых $\gamma_{1_{\max}}$ и $\gamma_{2_{\max}}$ совпадают с точностью $\delta=10^{-1}$. Численный эксперимент показал также важность выбора тестовых сигналов, используемых для идентификации ядер Вольтерра. Анализ исследуемых подходов позволил выделить области предпочтительности того или иного алгоритма для эталонной модели (2).

Таблица 1: Результаты вычислительного эксперимента.

$\lvert\alpha\rvert$ (в %)	40		45		50		55		60	
T (c)	$\gamma_{1_{\max}}$	$\gamma_{2_{\max}}$	$\gamma_{1_{\max}}$	$\gamma_{2_{\max}}$	$\gamma_{1_{\max}}$	$\gamma_{2_{\max}}$	$\gamma_{1_{\max}}$	$\gamma_{2_{\max}}$	$\gamma_{1_{\max}}$	$\gamma_{2_{\max}}$
30	55,62	55,59	56,17	56,12	57,23	57,17	58,88	58,83	61,30	61,28
35	54,27	54,25	54,94	54,98	56,16	56,12	58,03	58,00	60,78	60,76
40	53,40	53,38	54,15	54,13	55,49	55,47	57,52	57,51	60,51	60,50
45	52,80	52,78	53,61	53,60	55,04	55,03	57,21	57,20	60,37	60,36
50	52,36	52,35	53,24	53,23	54,74	54,73	57,00	56,99	60,28	60,28

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.

2. *Солодуша С.В.* Программное обеспечение и алгоритмы для моделирования нелинейной динамики полиномами Вольтерра // Программные продукты и системы. 2012. № 4. С. 137-141.

3. *Солодуша С.В.* Численное моделирование нелинейных динамических систем с векторным входом квадратичными полиномами Вольтерра // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Серия: Математика. Механика. Физика. 2012. № 34. С. 53-59.

4. *Солодуша С.В.* Численное моделирование динамики теплообмена модифицированным квадратичным полиномом Вольтерра // Вычислительные технологии. 2013. Т.18. № 2. С. 83-93.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 12-01-00722-а.

Solodusha S.V. COMPARISON OF SOME MODELING APPROACHES FOR DESCRIPTION OF NONLINEAR DYNAMICS BY VOLTERRA SERIES

A comparison of methods of modeling nonlinear dynamics using quadratic Volterra polynomials is considered. The results of computational experiments for reference models of heat exchange associated with the of automatic control problem are given.

Key words: Volterra equations of the first kind; system of automatic control.